Моделирование поведения кредитных портфелей и стресс-тест

Текст: **Владимир Бабиков,** к.ф.-м.н., МФТИ.

В статье предлагается метод исследования поведения кредитных портфелей с помощью подхода "Dual time dynamics" [3, 4], используемого для декомпозиции матриц переходов, что позволяет прогнозировать поведение кредитных портфелей с высокой точностью.

Даже поверхностный анализ статистических данных показывает, что качество вновь выдаваемых в США ипотечных кредитов начало ухудшаться с 2005 года. Американская экономика в тот период была достаточно стабильна, цены на недвижимость росли, а безработица была достаточно низкой. Самые же худшие кредиты были выданы в 2007 году, когда ухудшение качества показали все типы портфелей во всем мире.

Все мы знаем, что случилось потом. В большинстве экономик основной удар кризиса пришелся на 2008-2009 годы, и за тяжесть последствий, в первую очередь, надо благодарить плохие кредиты. В настоящей статье фактор качества кредитов рассматривается как внутренний фактор для кредитного моделирования. Есть и внешние факторы: преимущественно это влияние макроэкономики, а также сезонность и изменения в бизнес-процессах (далее макро-фактор).

В Соединенных штатах макро-фактор ухудшался с середины 2006 года, и к 2009 году экономика подошла к наихудшему положению: цены на дома достигли минимума, а безработица – максимума за этот период времени. В Европе для большинства кредитных портфелей негативное влияние макро-факторов достигло максимума в январе – феврале 2009 года и было усилено сезонностью, что делало общую картину весьма удручающей. Большие лаги созревания дефолтов (главным образом, в ипотечных кредитах) замаскировали ухудшение качества новых выдач на месяцы, и даже годы. Фактор, связанный с задержкой, мы будем называть фактором созревания.

Методология

В статье предлагается изучить все аспекты розничного (с формированием портфелей однородных ссуд) кредитования посредством специального подхода, названного "Матричная декомпозиция": Этот метод базируется на принципе декомпозиции матриц перехода по следующим компонентам:

– базисная матрица (эффект созревания),
– матричная компонента фактора качества и
– матричная компонента макро-фактора.

Для описания вышеупомянутого подхода нам понадобится соответствующая терминология. К настоящему времени уже существует устойчивый набор терминов, хотя он и не охватывает все интересующие нас процессы поведения кредитных портфелей. Попробуем частично систематизировать международную практику определений и обозначений, что, так или иначе, потребуется для изложения разработанной методологии.

Итак, сформулируем основные определения и введем требуемые обозначения.

Винтаж – группировка кредитов по заданному признаку, кредиты, образующие определенный винтаж, обладают уникальными характеристиками качества, досрочного погашения, возобновляемости кредитной линии и др. Большинство группировок подразумевает объединение кредитов по региональному принципу, формируются пулы с определенными сроками, на которые выданы кредиты, процентными ставками и временем выдачи. В этой статье винтаж объединяет кредиты, выданные в определенный месяц: $t_1 \in \{t_1^0, ..., t_1^N\}$. Далее индекс t_1 будет использоваться для индексирования месяца, в период которого выданы кредиты, образующие соответствующий винтаж. $N+1$ – количество винтажей, существующих на данный момент в портфеле.

Риск класс – состояние просрочки (RC, Risk Class), которое зависит от количества дней просрочки по кредиту DPD (Days past due):

– RC0 – 0 DPD;
– RC1 – 1-30 DPD;
– RC2 – 31-60 DPD, и так далее.

В качестве примера рис. 1 демонстрирует граф для потребительских кредитов, кредиты с просрочкой 120+ DPD считаются списанными. В этом примере существует два поглощающих состояния: Списания (Charge-off или C/O) и возврат всей суммы долга банку (Pay-Down или P/D).

Количество месяцев в книге – возраст винтажа k в месяцах (MOB, month on book, $k = t_2 - t_1$).

Дней в просрочке – количество дней в просрочке (DPD, days past due).

Срок кредита – кредиты могут выдаваться на разный срок, таким образом, их можно группировать по сроку. Часть портфеля сгруппированная по одному сроку будем называть «Тенором» (Tenor, Term). Значительные изменения структуры портфеля по сроку сильно влияют на поведение этого портфеля.

Базисная матрица – матрица частот переходов из одного состояния системы в другое (размерность матрицы $n * n$, где n – количество состояний системы). Базисная матрица Марковского процесса, изображенного в виде графа на рис. 1, будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{X}_{ij}^0(k) = \begin{pmatrix} x_{00}(k) & x_{01}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{06}(k) \\ x_{10}(k) & x_{11}(k) & x_{12}(k) & 0 & 0 & 0 & x_{16}(k) \\ x_{20}(k) & x_{21}(k) & x_{22}(k) & x_{23}(k) & 0 & 0 & x_{26}(k) \\ x_{30}(k) & x_{31}(k) & x_{32}(k) & x_{33}(k) & x_{34}(k) & 0 & x_{36}(k) \\ x_{40}(k) & x_{41}(k) & x_{42}(k) & x_{43}(k) & x_{44}(k) & x_{45}(k) & x_{46}(k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

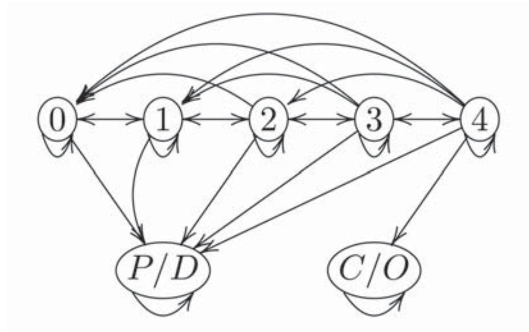
Каждый элемент матрицы есть функция частоты перехода из риск класса i в риск класс j от k, где k – возраст винтажа (количество месяцев в книге). В дальнейшем такую функцию мы будем назвать функцией созревания. Переходы кредитов из одного риск класса в другой неоднородны и, в частности, эта неоднородность объясняется эффектом созревания, то есть возраст кредита оказывает влияние на вероятности переходов. При наличии достаточной статистики функции созревания могут быть получены усреднением частот переходов для каждого перехода по всем винтажам (в общем же случае необходимо применять более сложные методы).

Распределение портфеля. Распределение объема основного долга портфеля $\overrightarrow{V(t_2)}$ (2) по просрочкам в текущем месяце t_2 (далее индекс t_2 мы будем применять только для обозначения календарного месяца) есть вектор состояния всего портфеля, в данном примере рассмотрен потребительский кредит без реструктуризации (рис. 1):

$$\overrightarrow{V(t_2)} = (v_0(t_2)\ v_1(t_2)\ \ldots\ v_6(t_2))^T \quad (2)$$

Винтажное распределение портфеля. Распределение объема основного долга $\overrightarrow{V(t_1, t_2)}$ (3) для винтажа t_1 (рассматривается часть портфеля, выданная в некоторый месяц t_1) по просрочкам в текущем месяце t_2 есть вектор состояния данного винтажа, в данном примере также рассмотрен потребительский кредит без реструктуризации:

[Рис. 1] Цепь Маркова для портфеля потребительских кредитов без реструктуризации.



$$\overrightarrow{V(t_1, t_2)} = (v_0(t_1, t_2)\ v_1(t_1, t_2)\ \ldots\ v_6(t_1, t_2))^T \quad (3)$$

Новый объем – объем выданных кредитов в месяце t_2 для винтажа t_1. В этом случае $t_1 = t_2$, и так как количество месяцев в книге $k = t_2 - t_1$, то $k = 0$. Объем новых выдач можно выразить, например, как $v_0(t_1, t_1)$.

Матричная компонента качества рассчитывается как суперпозиция различных винтажных характеристик. Эта компонента является функцией от t_1. Величина эффекта q для винтажа $t_1 \in \{t_1^0, ..., t_1^N\}$, есть некоторый параметр $\alpha^q(t_1) \in \alpha$, а чувствительность соответствующего эффекта $q \in \{1, ..., Q\}$ описывается матрицей $\boldsymbol{X}_{ij}^q \in \boldsymbol{X}$. Тогда матричная компонента качества может быть выражена следующим образом: $\sum_{q=1}^{q=Q} \alpha^q(t_1) \boldsymbol{X}_{ij}^q$.

Матричная компонента внешнего воздействия рассчитывается, как суперпозиция различных характеристик данного периода. Эта матричная компонента является функцией от месяца наблюдения t_2. Величина эффекта r для месяца $t_2 \in \{t_2^0, ..., t_2^M\}$, есть некоторый параметр $\beta^r(t_2) \in \beta$, а чувствительность соответствующего эффекта $r \in \{1, ..., R\}$ описывается матрицей $\boldsymbol{Y}_{ij}^r \in \boldsymbol{Y}$. Таким образом, матричная компонента внешнего воздействия может быть представлена так: $\sum_{r=1}^{r=R} \beta^r(t_2) \boldsymbol{Y}_{ij}^r$.

Матричная декомпозиция – это аддитивное разложение матрицы переходов на следующие составляющие: Базисная матрица (эффект созревания), Матричная компонента качества и Матричная компонента внешнего воздействия:

$$\boldsymbol{X}_{ij}(t_2-t_1,t_1,t_2)=\boldsymbol{X}^0_{ij}(t_2-t_1)+\sum_{q=1}^{q=Q}\alpha^q(t_1)\boldsymbol{X}^q_{ij}+ \\ +\sum_{r=1}^{r=R}\beta^r(t_2)\boldsymbol{Y}^r_{ij} \quad (4)$$

Если кредитный портфель состоит из разных «теноров» θ, то есть в составе кредитного портфеля имеются кредиты, выданные на разные сроки, то для спецификации чувствительности используются дополнительные параметры $\zeta^q_\theta \in \zeta,\ \eta^r_\theta \in \eta$:

$$\boldsymbol{X}^\theta_{ij}(t_2-t_1,t_1,t_2)=\boldsymbol{X}^{0,\theta}_{ij}(t_2-t_1)+ \\ +\sum_{q=1}^{q=Q}(\zeta^q_\theta+\alpha^q(t_1))\boldsymbol{X}^q_{ij}+\sum_{r=1}^{r=R}\eta^r_\theta\beta^r(t_2)\boldsymbol{Y}^r_{ij} \quad (5)$$

Для краткости записи матричную декомпозицию будем обозначать далее как $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}$. Этот набор параметров необходим для осуществления декомпозиции. Само собой, существует некоторый набор таких параметров, который наилучшим образом объясняет историческое поведение портфеля, и, следовательно, нам необходимо определить критерий оптимальности. Оптимальный набор параметров, удовлетворяющий критерию оптимальности, будем называть Моделью кредитного портфеля.

Модель кредитного портфеля – это такая матричная декомпозиция $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^*$, которая удовлетворяет критерию оптимальности.

Бизнес-сценарий – сценарные характеристики винтажей (объемы новых выдач $v^0(t_1)$ и их качество $\alpha^q(t_1)\in\alpha$, для $t_1 \in \{t_1^{N+1},...,t_1^{N^*}\}$ и $q \in \{1,...,Q\}$. По сути, план развития бизнеса – это один из бизнес-сценариев.

Сценарии внешнего воздействия – сценарные характеристики $\beta^r(t_2)\in\beta$ месяцев, для $t_2 \in \{t_2^{M+1},...,t_2^{M^*}\}$ и $r \in \{1,...,R\}$. Под сценарием внешних воздействий понимается оценка развития экономических тенденций (например, ВВП, безработицы, ...), изменение в системе сбора просроченной задолженности, сезонность.

Критерий. Предположим, что существует оценка распределения портфеля по состояниям $\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}(t_2^m)}, \forall m\in\{1,...,M\}$ (подразумевается, что портфель содержит различные тенора θ и винтажи, выданные в период с $t^0{}_1$ по $t^N{}_1$), которая задается следующим выражением:

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}(t_2^m)}=\sum_\theta\left(\sum_{t_1=t_1^0}^{t_1^N}\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}^\theta(t_1,t_2^m)}\right), \quad (6)$$

где

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}^\theta(t_1,t_2^m)}=\left(\prod_{t_2=t_1}^{t_2^m}\boldsymbol{X}^\theta_{ij}(t_2-t_1,t_1,t_2)\right)\overrightarrow{\boldsymbol{V}^\theta(t_1,t_1)}, \\ \forall m\in\{1,...,M\}$$

Далее предположим, что критерий оптимальности модели кредитного портфеля задан следующим выражением:

$$\sum_{t_2=t_2^1}^{t_2^M}\left(\overrightarrow{\varepsilon(t_2)}^T\boldsymbol{\Omega}\overrightarrow{\varepsilon(t_2)}\right)\to\min_{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}, \quad (7)$$

где $\overrightarrow{\varepsilon(t_2^m)}$ есть разностный вектор между фактическим распределением портфеля и его оценкой:

$$\overrightarrow{\varepsilon(t_2^m)}=\overrightarrow{\boldsymbol{V}(t_2^m)}-\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}(t_2^m)},\forall m\in\{1,...,M\},$$

и где Ω есть некоторая матрица, определяющая веса и тип ошибок. Тогда мы будем считать, что задан критерий оптимальности над пространством параметров $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}$.

Теория

Теперь нам необходимо ответить на вопросы: достаточно ли сказано для построения модели кредитного портфеля? позволит ли критерий оптимальности найти необходимые параметры, которые объяснят историческое поведение кредитного портфеля? Для этого сформулируем и докажем Лемму 1.

Лемма 1: Предположим, что над пространством параметров $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}$ посредством (7) задан критерий. Кроме того, предположим, что этот критерий неявно задает алгоритм Ψ:

$$\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^{k+1}=\Psi(\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^k)$$

который удовлетворяет условиям Теоремы 1 (Modified fixed point algorithm*).

Тогда алгоритм Ψ сходится к $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^*$, и полученная модель кредитного портфеля удовлетворяет критерию оптимальности, а сходимость алгоритма сильная.

Доказательство: Главным образом, Лемма 1 определяет алгоритм, который есть частный случай абстрактного алгоритма:

$$x^{k+1}=\Psi(x^k) \quad (8)$$

для решения задачи $x=\Psi(x)$, где $x\in V$, элемент Гильбертова пространства. Алгоритм (8) не удовлетворяет условиям теоремы о сильной сходимости $\{x^k\}$, даже когда оператор $\Psi:V\to V$ не расширяющий. Однако, существуют реализации алгоритма (8), которые обладают сильной сходимостью [11] при некоторых слабых ограничениях. Одна из реализаций – это алгоритм с фиксированной точкой, сформулированный в Теореме 1 “Strong convergence of modified fixed point algorithm”. Лемма доказана.

В свете сказанного мы приходим к заключению, что существует такой алгоритм последовательных приближений, который позволяет найти такую модель кредитного портфеля, которая удовлетворяет заданному критерию оптимальности и, значит, наилучшим образом объясняет историческое поведение кредитного портфеля, устанавливая связь между эффектом созревания, качественными характеристиками кредитного портфеля и внешними факторами.

При доказательстве Леммы 1 мы пользовались Теоремой 1, которая формулируется следующим образом.

Теорема 1: Пусть задан алгоритм (оператор) $\Psi:V\to V$, где V есть Гильбертово пространство. Рассмотрим последовательность:

$$x^{k+1}=\beta_k z^0+(1-\beta_k)\Psi(x^k)$$

Эта последовательность сильно сходится к некоторому решению x^*, так что:

$$\lim_{k\to\infty}\{x^k\}\to x^*, \\ x^*=\Psi(x^*).$$

При условии, что оператор Ψ не расширяющий, а $z^0\in V$ есть произвольный элемент Гильбертова пространства, и при условии что:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I):} & \beta_k\in[0,1] \\
\text{(II):} & \lim_{k\to\infty}\beta_k=0 \\
\text{(III):} & \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k=\infty \\
\text{(IV):} & \lim_{k\to\infty}(\beta_k-\beta_{k-1})(\beta_k)^{-1}=0
\end{array}$$

Доказательство этой теоремы впервые было получено Хальпеном [8]. Более строгое доказательство было получено Баушке [2]. А в целом касательно широкого класса задач в Банаховом пространстве, работа [11] дает обобщение Теоремы 1.

Итак, мы умеем объяснить то, что случилось в прошлом. Как теперь научиться прогнозировать будущее, используя модель кредитного портфеля $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^*$? Для этого, кроме модели, нам необходимо иметь как бизнес сценарии, так и макроэкономические сценарии.

Теорема 2 (Моделирование кредитного портфеля): Предположим, что Модель кредитного портфеля $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^*$ удовлетворяет критерию оптимальности (7). Далее предположим, что заданы бизнес-сценарии $v_0(t_1,\ t_1),\ \alpha^q(t_1)$, где $t_1 \in \{t_1^{N+1},...,t_1^{N^*}\}$, $q\in\{1,...,Q\}$ и сценарии внешних воздействий $\beta^r(t_2)$, где $t_2\in\{t_2^{M+1},...,t_2^{M^*}\}$, $r\in\{1,...,R\}$. Далее предположим, что $\boldsymbol{V}^\theta(t_1,t_2^M),\ \forall\theta,\ \forall t_1\in\{t_1^0,...,t_1^N\}$ есть текущее распределение портфеля по винтажам и по просрочкам. Тогда оценка будущего поведения портфеля может быть задана следующим выражением:

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}(t_2^m)}=\sum_\theta\left(\sum_{t_1=t_1^0}^{t_1^{N^*}}\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}^\theta(t_1,t_2^m)}\right), \quad (9)$$

где

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{V}}^\theta(t_1,t_2^m)}=\left(\prod_{t_2=t}^{t_2^m}\boldsymbol{X}^\theta_{ij}(t_2-t_1,t_1,t_2)\right)\overrightarrow{\boldsymbol{V}^\theta(t_1,t)},$$

$$t=\begin{cases} t_2^M, & \text{если } t_2^M>t_1; \\ t_1, & \text{если } t_2^M\leqslant t_1. \end{cases} \quad \forall m\in\{M+1,...,M^*\}.$$

Тогда при условии реализации заданных бизнес-сценария и сценария внешнего воздействия оценка (9) будет удовлетворять критерию оптимальности (10):

$$\sum_{t_2=t_2^{M+1}}^{t_2^{M^*}}\left(\overrightarrow{\varepsilon(t_2)}^T\boldsymbol{\Omega}\overrightarrow{\varepsilon(t_2)}\right)\to\min_{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} \quad (10)$$

Доказательство: Справедливость этой теоремы вытекает из Леммы 1. Согласно Лемме 1, матричная декомпозиция $\{\zeta,\eta,\alpha,\beta,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\}^*$ минимизирует взвешенную сумму квадратов остатков на интервале $t_2 \in \{t_2^0,...,t_2^M\}$. Согласно условиям теоремы, корректные бизнес-сценарии и сценарии внешних воздействий заданы для интервала $t_2\in\{t_2^{M+1},...,t_2^{M^*}\}$. Если же реализация внешнего воздействия и бизнес реализация совпадают со сценарными, то в этом случае становится очевидным, что выражение (9) минимизирует взвешенную сумму квадратов остатков (10).

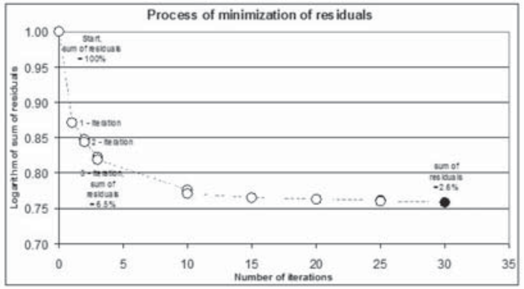
Доказательство не выглядит строгим. Однако многими экспериментами было установлено, что прогнозы действительно обладают высокой точностью. Так, если бизнес план был выполнен, а фактические макроэкономические тренды совпадали с прогнозом, то и фактическое поведение кредитного портфеля совпадало с прогнозом по модели.

Эмпирические исследования

Неявно заданный алгоритм (Лемма 1) может быть применен для того, чтобы настроить существующую модель для целей долгосрочного прогнозирования. Эмпирически было установлено, что алгоритм по Лемме 1 сходится. К слову сказать, сходимость алгоритма достаточно быстрая, как правило, 2-3 итерации достаточно, но в ряде случаев полезно получить более точные оценки. Рис. 2 демонстрирует процесс сходимости, по оси ординат отображается логарифм взвешенной суммы отклонений модели от реальных данных (7). За 100% принимается начальная фаза, так называемая «нулевая» модель, когда модель строится с использованием только Базисной матрицы. Ось абсцисс отображает количество итераций.

При помощи описанных алгоритмов мы можем изучать влияние различных факторов на поведение кредитных портфелей, кроме того, у нас появляется инструмент для построения высокоточных прогнозов поведения кредитных портфелей при условии воздействия факторов различной природы и для различных сценариев (бизнес-сценариев и сценариев внешнего воздействия). Исследование поведения кредитных портфелей на уровне матриц переходов дает существенные преимущества и возможность построить мощную аналитическую систему. Способность прогнозировать вероятности переходов из состояния в состояние существенно расширяет спектр возможных аналитических отчетов. Также с помощью такой системы появляется возможность получить оценки потерь, резервов в динамике для различных макроэкономических и бизнес-сценариев. Наиболее значимым преимуществом такой системы является развитый функционал для стресс-тестирования кредитных портфелей для различных макроэкономических сценариев. Становится простым и удобным делать сравнение потерь для различных портфелей, изучать различные факторы, влияющие на поведение портфелей.

[Рис. 2] Сходимость алгоритма.



[Рис. 3] Влияние данных по безработице и силы внешних факторов на поведение кредитного портфеля.

Высокая точность моделей позволяет строить модели страхования рисков. При управлении кредитными портфелями наиболее значимыми рисками являются кредитный и рыночный (а именно, риск процентной ставки). Существует возможность хеджирования одновременно как риска процентной ставки, так и кредитного риска, и такая система может быть построена на основании результатов Теоремы 2 (Модели матричной декомпозиции). Эта теорема также определяет алгоритмы стресс-тестирования для всех типов кредитных портфелей.

Возможность изучать макроэкономические кризисы – другой важнейший результат представленной модели (рис. 3). Агрегирование данных по различным странам и использование высокоточной аналитической системы обеспечивает возможностью существенно повысить эффективность бизнеса.

На практике подтвердилось, что подходы, основанные на методе “Dual time dynamics” [3, 4], дают существенно более точные оценки поведения кредитных портфелей по сравнению с аналогами, применяемыми в практике риск-менеджмента, особенно в ситуации, когда портфель подвержен ударам – существенным изменениям в процессе сбора просроченной задолженности, при значительных изменениях макроэкономики (например, в условиях кризиса), а также при существенных изменениях структуры портфеля.

Заключение

Заявленный комплексный подход позволяет изучить широкий спектр кредитных портфелей (потребительские кредиты, кредитные карты, ипотека, автокредиты) как с реструктуризацией, так и без реструктуризации, для различных экономик мира. Оценки, произведенные с помощью описанной методологии, остаются релевантными при разнообразных условиях, и эти оценки отображают как изменения в бизнес процессах, так и изменения внешней среды. Этот подход к оценке поведения кредитных портфелей имеет множество преимуществ, главным образом, в силу высокой точности. Одновременно модели, основанные на этом подходе, применяются для получения информативных аналитических отчетов о поведении кредитных портфелей, для стресс-тестирования, для

анализа развития макроэкономических кризисов. Как следствие, появляется возможность с высокой точностью оценить резервы и получить релевантные оценки для стресс-тестирования. Универсальный метод стресс-тестирования кредитных портфелей – один из главных результатов представленной работы.

Используя теорию матриц и понятие “Dual time dynamics” совместно с винтажной сегментацией портфеля, можно значительно улучшить качество прогнозов поведения кредитных портфелей. Кроме того, используя предлагаемый автором метод, одновременно можно изучать поведение различных значимых факторов, таких как досрочное погашение, качество портфелей, влияние макроэкономических и других внешних факторов.

Литература:

[1] Бабиков В, Г, Ценные бумаги. Прикладные методы прогнозирования. — М. о: МФТИ, 1999. — 114 с.

[2] Bauschke H. The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space. — Journal of Mathematical Analysis and Applications 202 (1), 1996. — 150-159.

[3] Breeden J. L. Modeling data with multiple time dimensions. — Computational Statistics and Data Analysis, 51, 2007. - 4761-4785.

[4] Breeden J.L., Thomas L., McDonald III J.W. Stress-testing retail loan portfolios with dual-time dynamics. — The Journal of Risk Model Validation (43-62), V.2/Number 2., 2008.

[5] Cox J. C., Ingersoll I.E. and Ross S. A. A theory of the term structure of interest rates. — Ecoonometrika, 53, 1985. - 385-407 c.

[6] Friesz T., Mookherjee R. Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts. Transportation Research Part B 40 (3), 2006. — 207-229 c.

[7] Friesz Terry L., Kim, Taeil, Kwon Changhyun, Rigdon Matthew A. Approximate Network Loading and Dual-Time-Scale Dynamic User Equilibrium. Transportation Research Part B vol. 45 (1), 2011. — 176-207 c.

[8] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. Bulletin of the American Mathematical Society 73 (6), 1967. - 957-961 c.

[9] Richards P. I. Shock waves on the highway. Operations Research 4 (1), 1956. — 42-51 c.

[10] Samuelson L. Evolutionary Games and Equilibrium Selection. MIT Press., 1998.

[11] Xu H. K., Iterative algorithms for nonlinear operators. Journal of the London Mathematical Society 66 (1), 2003. - 240-256 c.

[12] Xu Y., Wu J., Florian M., Marcotte P., Zhu D. Advances in the continuous dynamic network loading problem. Transportation Science 33(4), 1999. — 341353 c.

[13] Zhang A. Statistical Methods in Credit Risk Modeling. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Statistics) in The University of Michigan., 2009.